

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione suppletiva**

■ **PROBLEMA 1**

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

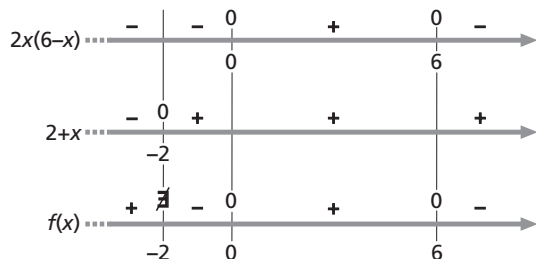
(1)
$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

- a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.
- b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K .
- c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x , determinare quello il cui perimetro è 16.
- d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.
- e) Spiegare perché la funzione (1) non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione suppletiva

■ **PROBLEMA 1**

a) Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \frac{2x(6-x)}{2+x}$ è l'intervallo $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$ e si ottiene imponendo che il denominatore di f non sia nullo. Lo schema di figura 1 mostra il segno di f : la funzione si annulla in $x=0$ e in $x=6$, è positiva per $x < -2$ e per $0 < x < 6$, negativa per $-2 < x < 0$ e per $x > 6$.



▲ **Figura 1.**

Calcoliamo i limiti. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f = +\infty.$$

Quindi la retta $x = -2$ è asintoto verticale. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui di equazione $y = my + q$, con $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$. Si ha:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(6-x)}{2+x} = -2$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x(6-x)}{2+x} + 2x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{16x}{2+x} = 16.$$

La retta $y = -2x + 16$ è asintoto obliquo di f .

La derivata prima

$$f'(x) = \frac{(12-4x)(2+x) - 12x + 2x^2}{(2+x)^2} = \frac{-2(x^2 + 4x - 12)}{(2+x)^2}$$

ha campo di esistenza uguale a quello di f e si annulla per $x = -6$ e $x = 2$.

Essendo il denominatore sempre positivo, il segno di f' è concorde con il segno del numeratore. Si ha:

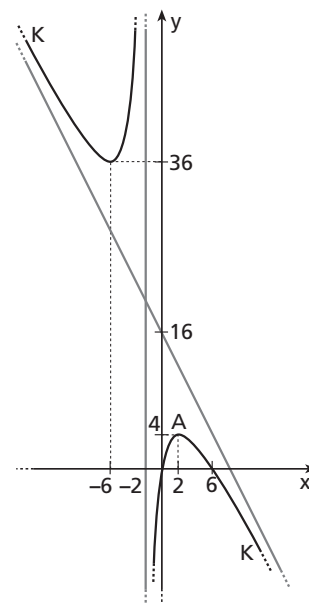
per $-6 < x < 2$, $f'(x) > 0$ e la funzione f è crescente;

per $x < -6$ e $x > 2$, $f'(x) < 0$ la funzione f è decrescente.

Quindi $x = -6$ è punto di minimo relativo e $x = 2$ è punto di massimo relativo. I corrispondenti valori di f sono $f(-6) = 36$ e $f(2) = 4$. Le coordinate del punto A sono dunque $A(2, 4)$.

La derivata seconda $f''(x) = \frac{-64}{(x+2)^3}$ non si annulla in nessun punto del suo campo di esistenza, è positiva per $x < -2$, negativa per $x > -2$. Si conclude che la funzione f non ha flessi, ha concavità rivolta verso l'alto per $x < -2$ e concavità rivolta verso il basso per $x > -2$.

Il grafico riportato in figura 2 mostra che la curva K è un'iperbole non equilatera di asintoti $x = -2$ e $y = -2x + 16$.



▲ Figura 2.

b) La domanda richiede un conteggio diretto dei punti. Dalle ipotesi

$$0 \leq \frac{a}{2} \leq 6 \text{ e } 0 \leq \frac{b}{2} \leq f(x) \text{ (} a \text{ e } b \text{ numeri interi) si ricava: } 0 \leq a \leq 12 \text{ e}$$

$$0 \leq b \leq 2f(x). \text{ Quindi i possibili valori che le ascisse dei punti possono}$$

assumere sono 13 e sono: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, \frac{11}{2}, 6$. Fissato $x = \frac{a}{2}$, i punti da conteggiare lungo la verticale per x sono tutti i punti $\left(\frac{a}{2}, b\right)$

che soddisfano la condizione $0 \leq b \leq 2f\left(\frac{a}{2}\right)$; essi sono $1 + \text{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$,

dove il simbolo int indica la funzione parte intera. Ricordiamo che dato z numero reale, $\text{int}(z)$ è il più grande numero intero minore o uguale a z . Memorizziamo i punti di ciascuna linea verticale nella seguente tabella.

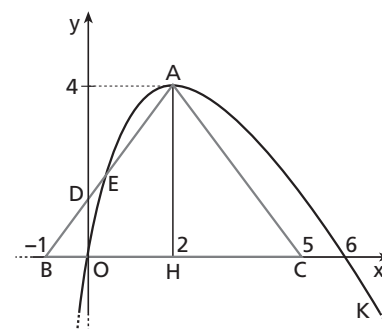
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$2f(x)$	0	4,4	6,6	7,7	8	7,7	7,2	6,3	5,3	4,1	2,8	1,4	0
$1 + \text{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$	1	5	7	8	9	8	8	7	6	5	3	2	1

Il numero di punti totale è quindi $\sum_{a=0}^{12} 1 + \text{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right) = 70$.

c) Indichiamo con $B(b; 0)$ il vertice a sinistra di $A(2; 4)$, con $C(c; 0)$ il vertice a destra di A e con $H(2; 0)$ il piede dell'altezza relativa alla base BC (vedi figura 3). Per le ipotesi sul triangolo ABC :

$$\overline{BH} = \overline{HC} \rightarrow c = 4 - b$$

e quindi il punto C ha coordinate $C(4 - b; 0)$. Sostituendo le coordinate dei punti A e B nella relazione $\overline{AB} + \overline{BH} = 8$ si ottiene: $\sqrt{(b-2)^2 + 16} + \sqrt{(b-2)^2} = 8$. Essendo $b < 2$ per ipotesi, si ha $|b-2| = 2-b$, quindi $\sqrt{(b-2)^2 + 16} = 6+b$ che ha senso per $b > -6$. D'altronde se fosse $b < -6$, la base BC del triangolo avrebbe lunghezza superiore a 16 e quindi il perimetro non potrebbe essere 16. Possiamo elevare al quadrato ambo i membri della relazione $\sqrt{(b-2)^2 + 16} = 6+b$ e risolvendo si ottiene $b = -1$. Quindi $c = 5$ e il triangolo richiesto ha vertici $A(2; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(5; 0)$.



▲ Figura 3.

- d)** Si osserva dalla figura 3 che la regione del triangolo ABC a sinistra della curva K è formata dall'unione del triangolo BOD , la cui area è $\frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{OD}$, con la figura di vertici ODE , la cui area richiede il calcolo di un integrale. In sintesi: $A_{BOE} = A_{OBD} + A_{ODE}$.
Calcoliamo le coordinate di D ed E . La retta per A e B ha equazione $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$, quindi si ha $D\left(0; \frac{4}{3}\right)$ e $A_{OBD} = \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{OD} = \frac{2}{3}$. Le coordinate di E si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{-2x^2 + 12x}{2 + x} \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equazione risolvente $5x^2 - 12x + 4 = 0$ che ha due soluzioni, $x = 2$ e $x = \frac{2}{5}$. Quindi $x = \frac{2}{5}$ è l'ascissa di E , essendo $x = 2$ l'ascissa del punto A già noto.

L'area della figura di vertici ODE è:

$$\int_0^{\frac{2}{5}} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - f(x) \right) dx = \int_0^{\frac{2}{5}} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - \frac{-2x^2 + 12x}{2 + x} \right) dx.$$

Poiché $\frac{-2x^2 + 12x}{2 + x} = -2x + 16 - \frac{32}{2 + x}$, si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2}{5}} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - \frac{-2x^2 + 12x}{2 + x} \right) dx &= \int_0^{\frac{2}{5}} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} + 2x - 16 + \frac{32}{2 + x} \right) dx = \\ \int_0^{\frac{2}{5}} \left(\frac{10}{3}x - \frac{44}{3} + \frac{32}{2 + x} \right) dx &= \left[\frac{5}{3}x^2 - \frac{44}{3}x + 32 \ln|x + 2| \right]_0^{\frac{2}{5}} = 32 \ln \frac{6}{5} - \frac{28}{5}. \end{aligned}$$

Quindi $A_{BOE} = A_{OBD} + A_{ODE} = \frac{2}{3} + 32 \ln \frac{6}{5} - \frac{28}{5} = 32 \ln \frac{6}{5} - \frac{74}{15}$.

Infine l'area della parte di triangolo a destra della curva K si calcola come differenza:

$$A_{OEAC} = A_{ABC} - A_{BOE} = 12 - 32 \ln \frac{6}{5} + \frac{74}{15} = \frac{254}{15} - 32 \ln \frac{6}{5}.$$

- e)** Una funzione $f: A \rightarrow B$ è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva. Se f è iniettiva ma non suriettiva, è sufficiente sostituire B con il codominio di f per ottenere una funzione invertibile, se f è suriettiva ma non iniettiva, per ottenere una funzione invertibile, si deve restringere il dominio di f ad un sottoinsieme di A in cui f sia iniettiva.

La funzione (1) $f(x) = \frac{2x(6-x)}{2+x}$ non è invertibile perché non è iniettiva: come dimostrato nel punto

a), $f(0) = f(6) = 0$. Osservando la figura 2 si può infatti notare che esistono infinite rette parallele all'asse x che intersecano il grafico di f in 2 punti. Restringiamo il dominio di f $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$ ad un sottoinsieme in cui f sia iniettiva. Sempre osservando la figura 2 si individuano almeno quattro sottoinsiemi in cui f è iniettiva: $D_1 =]-\infty, -6] \cup]-2, +2]$, $D_2 =]-\infty, -6] \cup [+2, +\infty[$, $D_3 = [-6, -2[\cup]-2, +2]$, $D_4 = [-6, -2[\cup [+2, +\infty[$. Altri sottoinsiemi si ottengono restringendo ulteriormente ciascuno dei sottoinsiemi individuati.

L'espressione dell'inversa di f si ottiene ricavando x dalla relazione $y = \frac{2x(6-x)}{2+x}$. Si ha:

$$x = \frac{12 - y \pm \sqrt{y^2 - 40y + 144}}{4} \Leftrightarrow x = 3 - \frac{1}{4}y \pm \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}.$$

Il segno \pm conferma la non invertibilità della funzione f sul suo campo di esistenza. Affinché la radice sia definita deve essere $y^2 - 40y + 144 \geq 0$ che è soddisfatta per $y \in]-\infty, +4] \cup [36, +\infty[$; abbiamo così ritrovato il codominio di f .

La parte dell'espressione di x che non dipende dal segno del radicale è $x = 3 - \frac{1}{4}y$ che, come si osserva in figura 4, è l'equazione della retta che passa dai punti di massimo e minimo relativi di f .

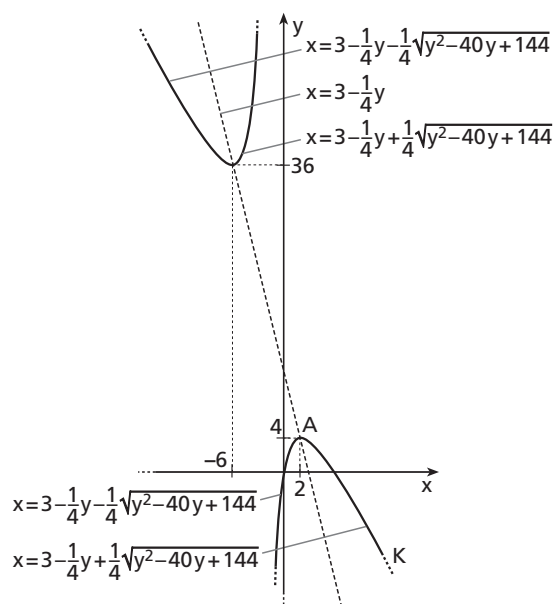
Quindi $x = 3 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ rappresenta la parte di grafico della curva K situata a sinistra della retta $x = 3 - \frac{1}{4}y$, mentre

$x = 3 - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ rappresenta la parte di grafico della curva K situata a destra della retta $x = 3 - \frac{1}{4}y$.

Allora, ad esempio, la funzione

$$g :]-\infty, +4] \cup [36, +\infty[\mapsto]-\infty, -6] \cup]-2, +2]$$

tale che $g(y) = 3 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ è l'inversa della funzione (1) ristretta al dominio D_1 . Procedendo in modo analogo si possono costruire altre funzioni inverse della funzione data (1).



▲ Figura 4.