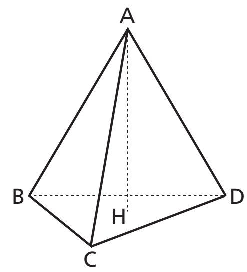
7 Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sé.

7 In un tetraedro regolare *ABCD*, come quello riportato in figura 9, i vertici sono equidistanti l'uno dall'altro, quindi ogni permutazione dei vertici del tetraedro è una isometria del tetraedro in sé.



▲ **Figura 9.**

Le permutazioni dei vertici di un tetraedro sono 4!, e quindi le isometrie sono in tutto 24. Contiamo le sole isometrie dirette. Se i vertici A, B, C, D del tetraedro sono disposti come in figura 9, un osservatore posto in A vede il triangolo BCD percorso in senso antiorario. Un'isometria che trasforma A, B, C, D rispettivamente in A', B', C' e D' è diretta se un osservatore posto in A' vede il triangolo $B'C'D'$ percorso in senso antiorario, altrimenti è indiretta. Per ogni isometria diretta ne esiste sempre una indiretta, quella che si ottiene dalla diretta scambiando due vertici trasformati. Si conclude che le isometrie dirette sono 12 di cui una è l'identità. Per individuare le rimanenti 11 isometrie consideriamo le simmetrie del tetraedro.

I 4 assi di rotazione passanti per un vertice ed il centro della faccia opposta danno origine a due rotazioni una di 120° e una di 240°. Si ottengono quindi 8 isometrie dirette. Ci sono inoltre tre assi di simmetria che sono rette congiungenti i punti medi di due spigoli opposti ma che sono anche assi di rotazione. Eseguendo attorno a ciascuno di essi una rotazione di 180° si ottengono le rimanenti 3 isometrie dirette.

Quindi le isometrie dirette sono 12 e sono: 4 rotazioni di 120°, 4 rotazioni di 240°, 3 rotazioni di 180° e l'identità.