

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

- 6** Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p , q , r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

- 6** L'equazione di secondo grado $xy + px + qy + r = 0$ è l'equazione di una conica. Dall'applicazione dei determinanti alla geometria analitica sappiamo che una conica è degenere se il determinante della matrice associata è nullo, altrimenti la conica è non degenere.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{q}{2} \\ \frac{p}{2} & \frac{q}{2} & r \end{bmatrix} = \frac{1}{8}pq + \frac{1}{8}pq - \frac{1}{4}r = \frac{1}{4}(pq - r).$$

Si ha che $\det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{q}{2} \\ \frac{p}{2} & \frac{q}{2} & r \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(pq - r) = 0 \Leftrightarrow pq = r.$

Quindi l'equazione della conica $xy + px + qy + r = 0$ rappresenta l'insieme di due rette se e solo se $pq = r$. Infatti sostituendo la relazione $pq = r$ nell'equazione della conica data questa diventa $(x + q)(y + p) = 0$ che rappresenta l'equazione della coppia di rette parallele agli assi cartesiani: $x = -q$ e $y = -p$.

Nel caso non si conosca l'applicazione dei determinanti alle coniche, il quesito può essere risolto nel seguente modo.

Se esprimiamo y in funzione di x , si ottiene $y = -\frac{px + r}{x + q}$. Si tratta di una funzione omografica che per

$pq \neq r$ rappresenta un'iperbole equilatera, e che per $pq = r$ diventa $y = -\frac{px + pq}{x + q}$, con $x + q \neq 0$. Se

studiamo l'equazione nella forma $y(x + q) = -p(x + q) \Leftrightarrow (x + q)(y + p) = 0$, essa rappresenta l'equazione della coppia di rette parallele agli assi cartesiani $x = -q$ e $y = -p$. Abbiamo così ritrovato il risultato precedentemente ottenuto.