ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2010

PROBLEMA 1

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano a un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste a x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, qual è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|, x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, qual è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0; 1)$? E nel punto $S(1; 0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

PROBLEMA 1

1. In figura 1 sono rappresentati il quadrato *ABCD* e le circonferenze γ e λ. Posto *T* il punto di tangenza tra le circonferenze e indicati con x e y i rispettivi raggi, risulta:

$$\overline{AP}=\overline{PT}=x,\quad \overline{PB}=1-x,\quad \text{con } 0<x<1,$$
$$\overline{CQ}=\overline{QT}=y,\quad \overline{BQ}=1-y,\quad \text{con } 0<y<1.$$

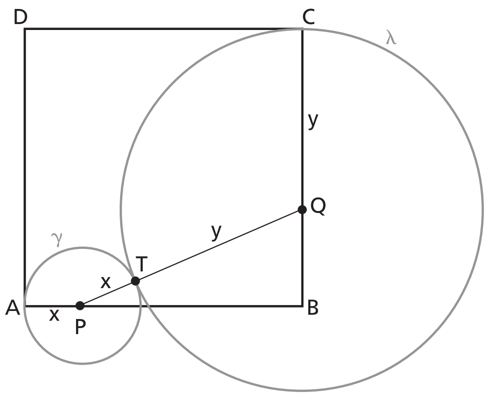


Figura 1.

Per ricavare y in funzione di x, applichiamo al triangolo rettangolo *PBQ* il teorema di Pitagora:

$$\overline{PQ}^2=\overline{PB}^2+\overline{BQ}^2 \;\rightarrow\; (x+y)^2=(1-x)^2+(1-y)^2 \;\rightarrow$$
$$x^2+y^2+2xy=1+x^2-2x+1+y^2-2y \;\rightarrow\; 2y(x+1)=2(-x+1) \;\rightarrow$$
$$y=\frac{1-x}{1+x} \;\rightarrow\; f(x)=\frac{1-x}{1+x}.$$

2. La funzione $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ è una funzione omografica definita per $x\neq-1$, di asintoti $x=-1$ e $y=-1$, di centro di simmetria $(-1;-1)$; le intersezioni con gli assi sono i punti $(0;1)$ e $(1;0)$, il suo grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (figura 2).
La funzione $f(x)$ è una funzione invertibile perché suriettiva per $y\neq-1$ e iniettiva nel suo dominio. Ricaviamo x in funzione di y:

$$y=\frac{1-x}{1+x} \;\rightarrow\; y+xy=1-x \;\rightarrow$$

$$x(y+1)=1-y \;\rightarrow\; x=\frac{1-y}{y+1},$$

scambiamo la x con la y:

$$y=\frac{1-x}{1+x},$$

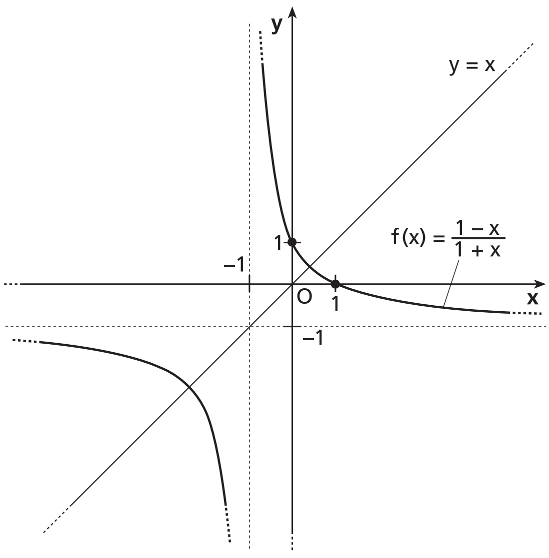
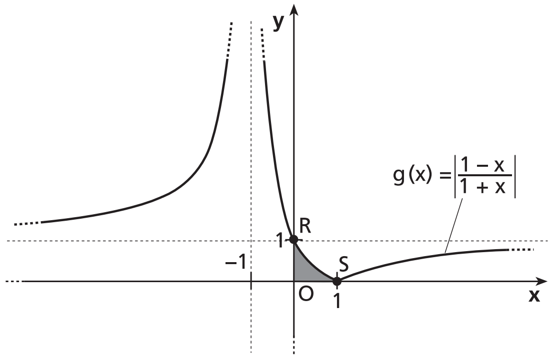


Figura 2.

pertanto $f^{-1}(x) = f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Il grafico della funzione inversa $f^{-1}(x)$ coincide con quello di $f(x)$, come si poteva prevedere dalla simmetria del grafico di f rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

3. Poiché $g(x) = |f(x)|$, osservando il grafico di $f(x)$ in figura 2 possiamo scrivere l'espressione analitica di $g(x)$ e rappresentare il suo grafico (figura 3):

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}, & \text{se} -1 < x \leq 1 \\ -f(x) = -\dfrac{1-x}{1+x}, & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$



▲ **Figura 3.**

In generale l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x)$ in un generico punto $(x_0; y_0)$, se esiste e non è parallela all'asse y, ha equazione:

$$y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0).$$

Calcoliamo la funzione derivata prima:

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(1+x)^2}, & \text{se} -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{2}{(1+x)^2}, & \text{se} < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

Nel punto $x_R = 0$, risulta $g'(0) = -2$ e la retta tangente al grafico nel punto $R(0; 1)$ ha equazione:

$$y - 1 = -2(x - 0) \quad \rightarrow \quad y = -2x + 1.$$

Nel punto $x_S = 1$ è necessario calcolare la derivata sinistra e destra:

$$g'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \left[-\frac{2}{(1+x)^2} \right] = -\frac{1}{2}, \; g'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \left[\frac{2}{(1+x)^2} \right] = \frac{1}{2}.$$

Poiché per $x_S = 1$, i valori della derivata sinistra e destra sono diversi, la funzione $g(x)$ non è derivabile in tale punto e non esiste una retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $S(1; 0)$, ma esistono la tangente destra e sinistra e S è un punto angoloso.

4. Osserviamo il triangolo mistilineo ROS evidenziato in figura 3.
La sua area corrisponde al valore del seguente integrale:

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{-(1+x)+2}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{1+x} \right) dx =$$
$$= -[x]_0^1 + 2[\ln(1+x)]_0^1 = -1 + 0 + 2(\ln 2 - \ln 1) = -1 + 2\ln 2 = \ln 4 - 1.$$