ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007

PROBLEMA 2

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

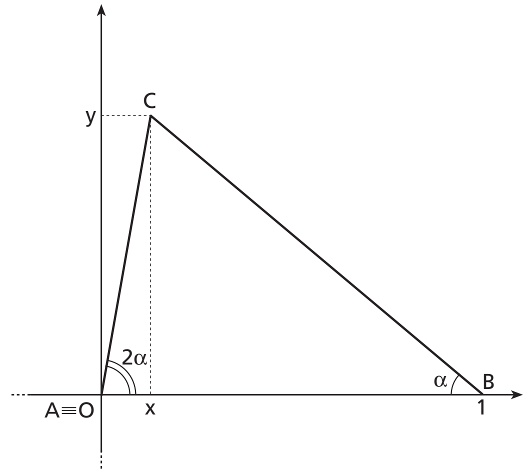
1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007

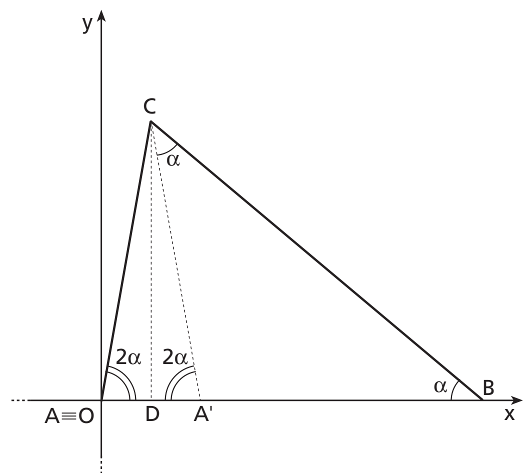
PROBLEMA 2

1. Consideriamo il sistema di riferimento Oxy centrato in A e con gli assi cartesiani orientati come in figura 2. Indichiamo con $(x\,;\,y)$ le generiche coordinate di C e con α l'angolo $A\hat{B}C$. Ne segue che $C\hat{A}B = 2\alpha$. Osserviamo che il punto C deve giacere nel semipiano $x < \frac{1}{2}$ altrimenti l'angolo $B\hat{A}C$ sarebbe minore o uguale ad $A\hat{B}C$.

Tale condizione può essere migliorata, osservando che nel primo quadrante è possibile costruire all'interno del triangolo ABC il triangolo isoscele $AA'C$ $\left(\text{poiché } x < \frac{1}{2}\right)$ di altezza CD, come in figura 3.



▲ **Figura 2.**



▲ **Figura 3.**

L'angolo $B\hat{C}A'$ è uguale ad α in quanto l'angolo supplementare di $C\hat{A}'B$ è uguale a 2α.

Quindi $\overline{CA'} = \overline{A'B} = 1 - 2x$.

Inoltre, essendo CA' l'ipotenusa del triangolo rettangolo $A'CD$ con cateto $\overline{DA'} = x$, deve essere $1 - 2x \geq x$, cioè $x \leq \frac{1}{3}$.

Poiché il problema presenta una simmetria rispetto all'asse x, limitiamoci a considerare il caso $y \geq 0$. Per trovare l'equazione del luogo geometrico possiamo procedere in due modi.

Primo metodo

Considerando i triangoli rettangoli ottenuti tracciando l'altezza relativa alla base AB, risulta:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{1-x} \\ \operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

nell'ipotesi che sia $x \neq 0$.

Il caso $x = 0$ è, comunque, geometricamente accettabile in quanto si otterrebbe il triangolo rettangolo in A e isoscele, con C di coordinate $(0; 1)$.

Supponiamo, allora, $x \neq 0$ (e quindi $\operatorname{tg}^2\alpha \neq 1$). Dal sistema, ricordando la formula di duplicazione della tangente, otteniamo:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{1-x} \\ \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{2\left(\dfrac{y}{1-x}\right)}{1-\left(\dfrac{y}{1-x}\right)^2} = \frac{y}{x}$$

Svolgendo i calcoli e portando il tutto a forma normale otteniamo

$$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0.$$

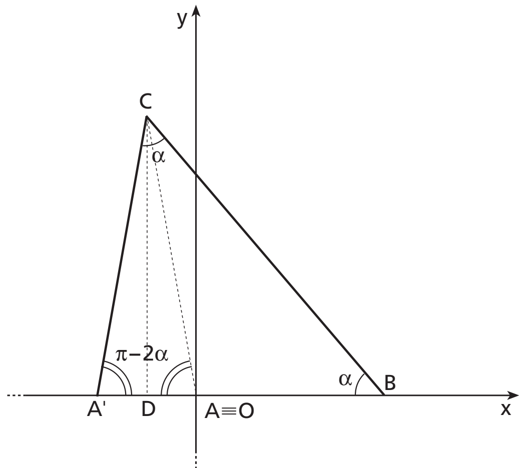
Questa equazione comprende anche il caso $x = 0$, poiché la curva passa per il punto $(0; 1)$, e i casi simmetrici. Questi ultimi corrispondono a valori negativi di y.
Essa rappresenta, dunque, l'equazione del luogo geometrico richiesto, considerando però la limitazione $x \leq \frac{1}{3}$.

Secondo metodo

Osserviamo che la figura 3 rappresenta il caso in cui $x \geq 0$.
Il caso in cui, invece, si ha $x < 0$ è rappresentato in figura 4. In questo caso è possibile costruire un triangolo isoscele $A'AC$, esterno al triangolo ABC, di altezza CD. L'angolo $C\hat{A}A'$ è uguale a $\pi - 2\alpha$, in quanto l'angolo supplementare $C\hat{A}B$ è uguale a 2α. Ne segue che anche il triangolo $A'BC$ è isoscele, in quanto $A'\hat{C}B = A'\hat{B}C = \alpha$.
Consideriamo il triangolo rettangolo $C\hat{D}A$, in cui $\overline{CD} = y$; vale inoltre che $\overline{AD} = -x$ e $\overline{AC} = \overline{A'B} = 1 - 2x$.
In entrambi i casi, applicando il teorema di Pitagora al triangolo CDA', otteniamo che

$$x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$$

che è l'equazione del luogo cercato.



▲ **Figura 4.**

2. Riscrivendo, con il metodo del completamento dei quadrati, l'equazione nella forma

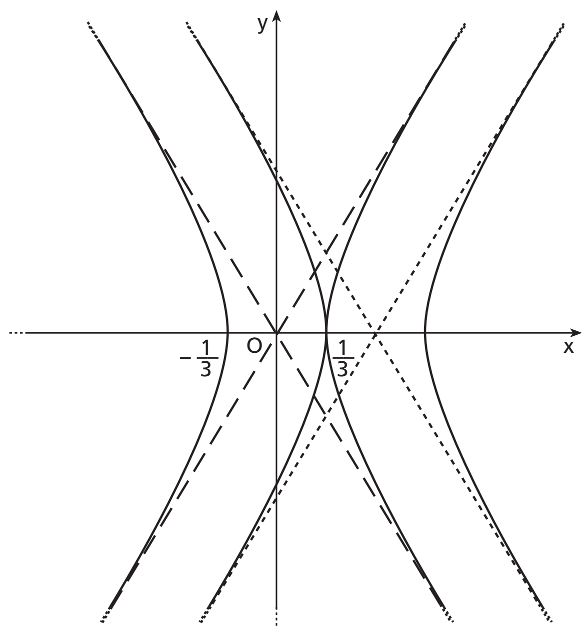
$$9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1$$

è facile riconoscere che tale curva è l'iperbole che si ottiene dalla traslazione rispetto al vettore $\vec{v}\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ dell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

che ha vertici in $\left(\pm\frac{1}{3}; 0\right)$ e asintoti $y = \pm\sqrt{3}x$ (figura 5).

Tenendo conto delle limitazioni geometriche, γ è il ramo sinistro di tale iperbole traslata.



▲ **Figura 5.**

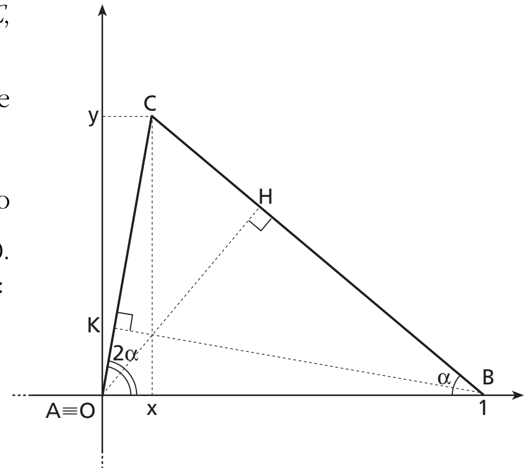
3. Siano H e K i piedi delle altezze relative ai lati CB e AC, ne segue che $\overline{AH} = \operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{BK} = \operatorname{sen}(2\alpha)$.

Inoltre, vale $\alpha < \frac{\pi}{3}$ perché $\alpha + 2\alpha < \pi$ (in quanto due angoli interni di uno stesso triangolo).

Supponiamo, quindi, $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ e cerchiamo il massimo in tale dominio della funzione $f(\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2(2\alpha)$. Per farlo calcoliamo la derivata prima della funzione $f(\alpha)$:

$$f'(\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 4\operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha) =$$
$$= \operatorname{sen}(2\alpha) + 4\operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha) =$$
$$= \operatorname{sen}(2\alpha)[1 + 4\cos(2\alpha)];$$

$\operatorname{sen}(2\alpha)$ è sempre positivo in $\left]0; \frac{\pi}{3}\right[$, quindi $f'(\alpha) \geq 0$ se $1 + 4\cos(2\alpha) \geq 0$.

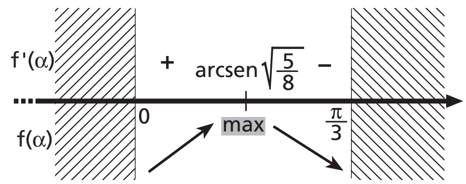


▲ **Figura 6.**

$$1 + 4(1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha) \geq 0 \;\rightarrow\; \operatorname{sen}^2\alpha \leq \frac{5}{8} \;\rightarrow\; 0 < \alpha \leq \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Riportiamo l'andamento della funzione in figura 7.

Quindi l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze AH e BK è $A\hat{B}C = \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{5}{8}} \simeq 52°14'$.



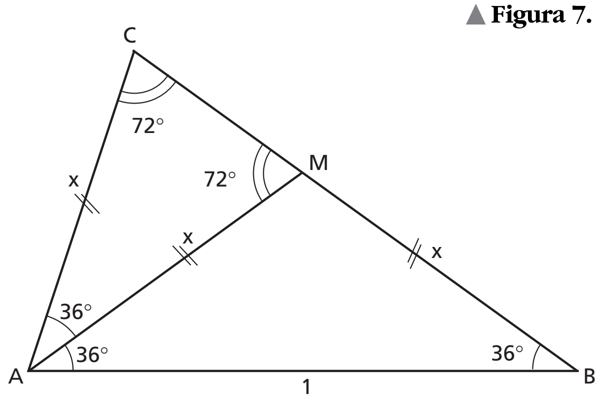
▲ **Figura 7.**

4. Per $\alpha = 36°$ si ottiene un triangolo isoscele ABC di angoli $C\hat{A}B = A\hat{C}B = 72°$ e lati $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$. Tracciando la bisettrice dell'angolo $C\hat{A}B$ che interseca il lato BC nel punto M si ottiene il triangolo ACM simile al triangolo ABC poiché equiangoli, come mostrato in figura 8.
Se chiamiamo $\overline{AC} = x$ risulta $\overline{AM} = x$, $\overline{BM} = x$ e $\overline{CM} = 1 - x$.
Per similitudine otteniamo:

$$CM : CA = CA : 1, \text{ cioè } 1 - x : x = x : 1,$$

e quindi $x^2 = 1 - x \rightarrow x^2 + x - 1 - 0$,

la cui la cui soluzione positiva è $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.



▲ **Figura 8.**