

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

■ **PROBLEMA 1**

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

- a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
- b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x + y = 4$.
- c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1; 1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
- d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t .
- e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k .

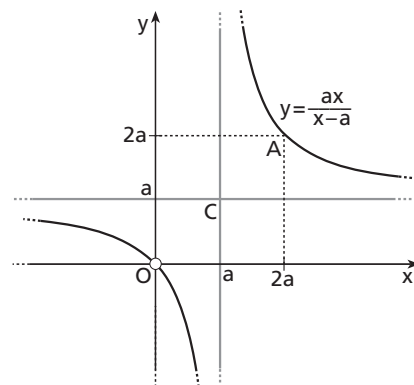
SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

PROBLEMA 1

a) Posto $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la relazione $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ diventa

$ay + ax = xy$ da cui $y = \frac{ax}{x-a}$. La funzione da studiare è

$y = \frac{ax}{x-a}$ con dominio $x \neq 0 \wedge x \neq a$. Si tratta di una funzione omografica il cui grafico è un'iperbole equilatera con asintoti $x = a$ e $y = a$, centro di simmetria $C(a, a)$ e vertici $A(2a, 2a)$, $O(0, 0)$. In quest'ultimo punto la funzione non è però definita e presenta una discontinuità di terza specie con $x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{ax}{x-a}$. Si può tracciare il grafico (figura 1) nel quale il valore di a è stato scelto in maniera arbitraria.



▲ Figura 1.

b) Si valuta la posizione reciproca tra la funzione e la retta discutendo il sistema
$$\begin{cases} y = \frac{ax}{x-a} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è $x^2 - 4x + 4a = 0$; essa ammette soluzioni reali se e solo se il discriminante è positivo o nullo. Poiché $\frac{\Delta}{4} = 4 - 4a$, risulta $4 - 4a \geq 0$ per $a \leq 1$.

Pertanto la retta t è secante per $a < 1$, è tangente per $a = 1$.

c) La circonferenza k ha centro $C'(1, 1)$ noto e raggio incognito. Si tracci la perpendicolare $C'H$ alla retta t (figura 2). Per un teorema della geometria euclidea, tale perpendicolare divide a metà la corda BD che la circonferenza stacca sulla retta. La distanza del punto $C'(1, 1)$ dalla retta $x + y = 4$ vale:

$$\overline{C'H} = \frac{|1 + 1 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2},$$

$$\text{mentre } \overline{HB} = \frac{\overline{BD}}{2} \rightarrow \overline{HB} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $BC'H$, risulta $\overline{C'B} = 2$. Esso è il raggio cercato.

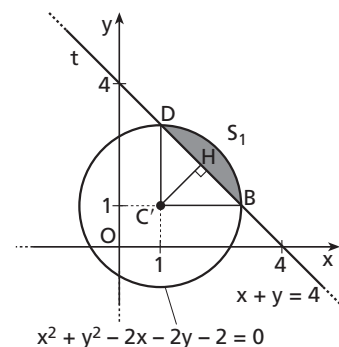
L'equazione della circonferenza k è:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \text{ ovvero } x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$$

d) Ponendo a sistema l'equazione della circonferenza k e la retta t si trovano le coordinate dei punti B e D :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \rightarrow B \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}; D \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Valutando le coordinate dei punti C' , B e D si osserva che i segmenti $C'B$ e $C'D$ sono rispettivamente paralleli agli assi cartesiani e quindi tra loro perpendicolari. Pertanto il settore circolare delimitato dall'angolo $\widehat{BC'D}$ è la quarta parte del cerchio corrispondente alla circonferenza. Indicata con S_1 l'area del minore dei segmenti circolari in cui la retta t divide la circonferenza k , essa si ottiene per differenza



▲ Figura 2.

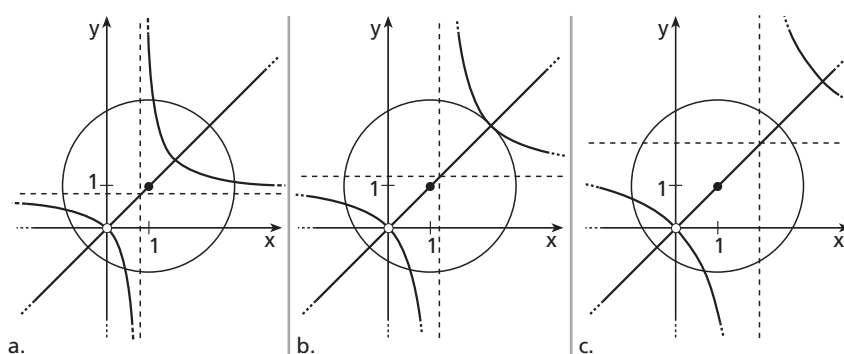
tra l'area del settore e l'area del triangolo $C'BD$.

$$S_1 = \frac{\pi(2)^2}{4} - \frac{2 \cdot 2}{2} = \pi - 2.$$

L'area S_2 del restante segmento circolare si ricava per differenza tra l'area del cerchio e S_1 :

$$S_2 = \pi(2)^2 - (\pi - 2) = 3\pi + 2.$$

- e) La risoluzione è compiuta per via geometrica poiché la discussione algebrica della tangenza tra circonferenza e iperbole porterebbe a un sistema di quarto grado difficilmente risolvibile per via elementare. Nella figura 3 sono rappresentate le possibili posizioni dell'iperbole parametrica rispetto alla circonferenza.



◀ Figura 3.

Si osserva che entrambe le curve sono simmetriche rispetto alla bisettrice del I e III quadrante: nella circonferenza il centro si trova sulla bisettrice che è pertanto diametro e quindi asse di simmetria della circonferenza; nell'iperbole la retta $x = y$ costituisce l'asse trasverso dell'iperbole stessa e pertanto è asse di simmetria. Ne consegue che i punti di intersezione tra le due curve sono a due a due simmetrici rispetto all'asse di simmetria $y = x$. Nel caso della tangenza due di questi punti devono coincidere e quindi trovarsi sulla bisettrice. Si trova il punto di tangenza T (figura 3b) risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \text{ (non accettabile)} \vee \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases}.$$

Si impone all'iperbole $x = \frac{ax}{x-a}$ il passaggio per il punto $T(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$:

$$1 + \sqrt{2} = \frac{a(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2} - a} \rightarrow (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - a) = a(1 + \sqrt{2}) \rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

L'iperbole è tangente alla circonferenza k per $a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.